View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Kazan Federal University Digital Repository

На правах рукописи

**Антипова Мария Владимировна**

# Три-ткани Бола с тензором кривизны минимального ранга

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2013

Работа выполнена на кафедре геометрии ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | Шелехов Александр Михайлович,<br>доктор физико-математических наук,<br>профессор, Тверской государственный<br>университет, профессор кафедры<br>функционального анализа и геометрии |
| Официальные оппоненты: | Кушнер Алексей Гурьевич,<br>доктор физико-математических наук,<br>доцент, Институт проблем управления<br>имени В. А. Трапезникова,<br>заведующий лабораторией №6 |
| | Уткин Алексей Алексеевич,<br>кандидат физико-математических наук,<br>доцент, Орский гуманитарно-технологический<br>институт, доцент кафедры алгебры, геометрии,<br>теории и методики обучения математике |
| Ведущая организация: | Московский государственный<br>университет имени М.В. Ломоносова |

Защита состоится 19 декабря 2013 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д.212.081.10 в ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «__» ноября 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.212.081.10
канд. физ.-мат. наук, доцент Липачев Е.К.

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В теории многомерных три-тканей большую роль играют условия замыкания различных конфигураций, которые позволяют провести классификацию тканей. В конце 20-х годов XX века В. Бляшке, Г. Томсен, К. Рейдемейстер, Г. Бол показали, что условиям замыкания на криволинейной три-ткани $W$ конфигураций определенного вида, образованных линиями этой ткани, соответствуют некоторые тождества, выполняемые в координатных лупах этой ткани. В работах [1] и [2], появилось условие шестиугольности $(H)$. Затем в работе [3] были рассмотрены условия замыкания других конфигураций, названных впоследствии конфигурациями Томсена и Рейдемейстера, и было показано, что условия их замыкания связаны с групповыми свойствами три-ткани. Наконец, в работе [4] были введены еще три типа конфигураций и соответственно три типа условий замыкания — условия Бола.

Дифференциальные уравнения три-ткани $W(r, r, r)$ общего вида, образованной тремя слоения коразмерности $r$ на гладком многообразии размерности $2r$, и некоторых специальных классов таких три-тканей были впервые найдены в середине тридцатых годов XX века в работе [5] С. Черна. М.А. Акивис в [6] нашел вид структурных уравнений три-ткани $W(r, r, r)$ в современной инвариантной форме, что позволило записать результаты Черна в более лаконичном виде и эффективно исследовать некоторые специальные классы тканей (трансверсально-геодезические, изоклинные и др). Методами, разработанными в этой работе, получены все существенные результаты по теории многомерных тканей, см. монографию [7].

В [8], [9] найдены необходимые условия замыкания фигур Бола $B_\ell$, $B_r$ и $B_m$ на многомерной три-ткани. Они заключаются в том, что тензор кривизны ткани является симметричным по каким-либо двум нижним индексам. В рабо-

[1] Thomsen G. Un teorema topologico sulle shiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isotermo-asintotiche. // Unione mat. ital. 1927. 6. S. 80—85.

[2] Blaschke W. Thomsens sechseckgewebe zueinander diagonale Netze. // Math. Z. 1927. 28. S. 150—157.

[3] Reidemeiste C. Gewebe und Gruppen. // Math. Z. 1928. 29. S. 427—435.

[4] Bol G. Gewebe und Gruppen. // Math. Ann. 1937. 114. S. 414—431.

[5] Chern S. S. Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus $r$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in $\mathbf{R}_{2r}$ // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1936. V. 11. № 1–2. p. 333–358.

[6] Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей // Тр. геометр. сем. ВИНИТИ АН СССР. 1969. Т. 2. С. 7–31.

[7] Акивис М. А. Шелехов А. М. Многомерные три-ткани и их приложения: Монография // Тверь. Твер. гос. ун-т, 2010. 308 с.

[8] Акивис М. А. Шелехов А. М. О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани и ассоциатора связанной с ней локальной квазигруппы // Сиб. мат. журнал. 1971. № 5. С. 953–966.

[9] Акивис М. А. Шелехов А. М. О локальных дифференцируемых квазигруппах и связностях, присоединенных к три-ткани // Сиб. мат. журнал. 1971. № 6. С. 1181–1191.

тах [10], [11] А. Д. Иванов доказал достаточность этих условий для четырехмерных тканей Бола, а также провел их классификацию. В. И. Федорова в [12] доказала достаточность этих условий для произвольной размерности и провела в [13] классификацию шестимерных тканей Бола.

Теория многомерных три-тканей имеет многочисленные приложения в разных разделах математики и физики, см. об этом в [14], [15]. Это важное обстоятельство объясняется тем фактом, что три-ткань вполне определяется своим уравнением $z = f(x, y)$, связывающим параметры слоев ткани, проходящих через одну точку. Другими словами, три-ткань есть геометрическая модель функции двух переменных $z = f(x, y)$. Например, в [16] Е. В. Ферапонтов описал систему трех дифференциальных уравнений гидродинамического типа, характеристики которой образуют на любом решении шестиугольную три-ткань. В этом случае система будет слабо нелинейной и полугамильтоновой.

Уравнение три-ткани можно рассматривать как бинарную операцию, квазигруппу или лупу. Это дает возможность применять методы теории тканей при изучении свойств гладких квазигрупп и луп, что расширяет область применения теории три-тканей. Например, в работе [17] А. И. Нестеров проанализировал возможности применения квазигрупповых идей в различных областях теоретической физики (теория поля, общая теория относительности и т.д.).

Наибольший интерес представляют квазигруппы и лупы, близкие, в определенном смысле, к группам Ли. Впервые гладкие лупы такого рода начал изучать А. И. Мальцев. В работе [18] он рассмотрел аналитические локальные альтернативные лупы. Он показал, что эти лупы вполне определяются инфинитезимальным объектом - бинарно-лиевой алгеброй, и "что классическое соответствие между аналитическими локальными группами и алгебрами Ли, устанавливаемое тремя основными теоремами Ли, в полной мере имеет место между аналитическими альтернативными локальными лупами и бинарно-лиевыми алгебрами".

[10] Иванов А. Д. О четырехмерных тканях Боля эллиптического и гиперболического типов // Изв. вузов. Матем. 1975. № 9. С. 25–34.

[11] Иванов А. Д. О четырехмерных тканях Боля параболического типа // Изв. вузов. Матем. 1976. № 1. С. 42–47.

[12] Федорова В. И. Об условии, определяющем многомерные три-ткани Боля // Сиб. мат. журнал. 1978. № 19. С. 922–928.

[13] Федорова В. И. Шестимерные три-ткани Боля с симметричным тензором $a_{ij}$ // Ткани и квазигруппы. Калинин. Калининский гос. ун-т. 1981. С. 110–123.

[14] Бляшке В. Введение в геометрию тканей. М.: Физматгиз, 1959. 144 с.

[15] Акивис М. А. Шелехов А. М. Многомерные три-ткани и их приложения: Монография // Тверь. Твер. гос. ун-т, 2010. 308 с.

[16] Ферапонтов Е. В. Геометрия тканей и математическая физика // В кн.: Акивис М. А., Шелехов А. М. Многомерные три-ткани и их приложения: Монография. Тверь. Твер. гос. ун-т, 2010. С. 264–300.

[17] Нестеров А. И. Квазигрупповые идеи в физике // Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Труды института физики. Тарту. 1990. Т. 66. С. 107–120.

[18] Мальцев А.И. Аналитические лупы // Сиб. мат. журнал. 1955. № 3. С. 569–575.

Как установил А. И. Мальцев, для аналитических альтернативных луп и, в частности, для луп Муфанг справедлива формула Кэмпбелла—Хаусдорфа, причем коммутатор в ней удовлетворяет некоторому кубическому соотношению, называемому тождеством Сейгла [19]. Лупам Муфанг соответствуют ткани Муфанг, геометрия которых описана в работе М. А. Акивиса и А. М. Шелехова [20].

Обобщением луп Муфанг являются лупы Бола (левые, правые и средние), которые являются алгебраическим аналогом тканей Бола соответствующего типа. Известно, например, что пространство скоростей С.Т.О. является лупой Бола относительно закона сложения скоростей. В работе [21] Л. В. Сабинин и П. О. Михеев показали, что гладким лупам Бола соответствует инфинитезимальный объект - алгебра Бола, в которой помимо бинарной операции есть и тернарная операция, причем эти операции связаны весьма сложными соотношениями. Отметим, что в теории тканей Бола эти соотношения (в несколько ином виде) были найдены В. И. Федоровой. В работе [22] Т. Б. Буэту классифицировал разрешимые трехмерные тройные системы Ли (частный случай алгебр Бола), а также привел примеры алгебр Бола с трилинейными операциями разрешимого типа. Для каждого типа алгебр он нашел соответствующие три-ткани.

Вследствие сложного строения алгебр Бола изучение геометрических свойств тканей Бола и их локальная классификация также весьма сложна. В частности, не до конца классифицированы даже шестимерные ткани Бола. В настоящей работе дается подход к классификации многомерных средних тканей Бола с тензором кривизны минимального ранга. Описываются некоторые геометрические свойства таких тканей и подробно изучаются восьмимерные ткани.

Теория тканей Бола тесно связана с теорией симметрических пространств. В 1926 г. в своей работе [23] Э. Картан положил начало исследованию симметрических пространств, которые играют важную роль в дифференциальной геометрии и её приложениях. В [24] Л. В. Сабинин и П. О. Михеев показали, что геодезическая лупа локально симметрического пространства аффинной связности удовлетворяет левому тождеству Бола, и что лупа, удовлетворяющая левому тождеству Бола и тождеству автоморфной обратимости $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, является алгебраическим аналогом симметрического пространства. Хорошо из-

[19] Сейгл А. А. Mal'cev algebras // Trans. Amer. Math. 1961. № 3. p. 426–458.

[20] Акивис М. А. Шелехов А. М. Многомерные три-ткани и их приложения: Монография // Тверь. Твер. гос. ун-т, 2010. 308 с.

[21] Сабинин Л. В., Михеев П. О. Теория гладких луп Бола // М.: Ун-т Дружбы народов, 1985. 80 с.

[22] Bouetou T. B. Классификация разрешимых тройных систем Ли размерности 3. //Деп. ВИНИТИ. 17.12.1993. № 3101.

[23] Cartan E. Les groupes d'holonomie des espaces generalises // Acta. math. 1926. 48. P. 1–42.

[24] Сабинин Л. В., Михеев П. О. Об аналитических лупах Бола // Ткани и квазигруппы. Калинин. Калининский гос. унив. 1982. С. 102–109.

вестна связь локально симметрических пространств с тройными системами Ли, см. работы [25], [26].

Указанная симметрическая структура описывается на тканях Бола так называемой сердцевиной. Понятие сердцевины ткани Бола было введено В.Д. Белоусовым в [27] для абстрактных тканей, являющихся аналогом квазигруппы или лупы Бола без топологической или гладкой структуры. Для многомерных тканей Бола сердцевина полностью задает структуру симметрического пространства, возникающего на базе одного из слоений этой ткани [28]. Поэтому нахождение сердцевины является важной частью изучения геометрии тканей Бола. В диссертации мы находим сердцевины для трех классов восьмимерных тканей Бола с тензором кривизны минимального ранга.

Как показано в [29], ткани Бола содержат подкласс эластичных тканей (ткани $E$), в координатных лупах которых выполняется тождество эластичности $x(yx) = (xy)x$. Там же показано, что четырехмерные эластичные ткани являются групповыми (тривиальный случай), а шестимерных не групповых тканей $E$ всего две. Примеров эластичных тканей большей размерности в математической литературе нам не встречалось. В настоящей работе найдены некоторые классы восьмимерных средних тканей Бола и показано, что все они являются тканями $E$.

Из вышеизложенного вытекает актуальность выбранного направления исследований — изучения тканей Бола специального вида.

**Цель работы.** Цель работы состоит в исследовании средних три-тканей Бола с тензором кривизны минимального ранга, описании их геометрических свойств и проведении классификации, а также в более подробном изучении восьмимерных тканей указанного вида.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**.

1. Определить класс многомерных средних три-тканей Бола с тензором кривизны минимального ранга (ткани $SB_m$), найти структурные уравнения таких тканей.

2. С помощью структурных уравнений описать основные классы три-тканей $SB_m$.

---

[25] Лоос О. Симметрические пространства // М.: Наука, 1985.

[26] Трофимов В. В. Введение в геометрию многообразий с симметриями // М.: МГУ, 1989.

[27] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967. 223 с.

[28] Акивис М. А. Шелехов А. М. Многомерные три-ткани и их приложения: Монография // Тверь. Твер. гос. ун-т, 2010. 308 с.

[29] Шелехов А. М. Об аналитических решениях уравнения $x(yx) = (xy)x$ // Матем. заметки. 1991. № 4. С. 132–140.

3. Классифицировать восьмимерные ткани $SB_m$, найти структурные и конечные уравнения каждого из классов тканей основного типа $SB_m^8$.
4. Описать основные свойства каждого из классов тканей $SB_m^8$, в частности, найти их сердцевины и доказать, что ткани $SB_m^8$ являются тканями $E$.

**Методы исследования.** В теории многомерных три-тканей Бола применяются методы тензорного анализа, внешнее дифференциальное исчисление, теория связностей, теория групп Ли, теория симметрических пространств, методы проективной и аффинной геометрии и т.д. Основным методом исследования является метод внешних форм и подвижного репера Э. Картана, адаптированный М. А. Акивисом, В.В. Гольдбергом, А.М. Шелеховым и др. для изучения теории многомерных три-тканей. Результаты, полученные в работе, имеют, в основном, локальный характер.

**Научная новизна.** Основные результаты, полученные в процессе диссертационного исследования, являются новыми.

**Теоретическое и прикладное значение.** Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы при чтении спецкурсов в рамках специализации по геометрии тканей и ее приложениям.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях (в хронологическом порядке):

— вторая Российская школа-конференция с международным участием для молодых ученых «Математика, информатика, их приложения и роль в образовании» (Тверь, декабрь 2010 г.);

— геометрический семинар кафедры геометрии Московского педагогического государственного университета, рук. В. Ф. Кириченко (апрель 2011 г.);

— международная конференция «Геометрия в Одессе — 2011» (Украина, Одесса, май 2011 г.);

— международный геометрический семинар имени Г. Ф. Лаптева «Лаптевские чтения — 2011» (Пенза, сентябрь 2011 г.);

— геометрический семинар кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета, рук. А. М. Шелехов (апрель, октябрь 2011 г.);

— международная конференция «Геометрия в Одессе — 2012» (Украина, Одесса, май 2012 г.);

— XI молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения — 2012» (Казань, ноябрь 2012 г.);

— международная школа-конференция «Геометрия. Управление. Инварианты» (Москва, декабрь 2012 г.);

— третья Российская школа-конференция с международным участием для молодых ученых «Математика, информатика, их приложения и роль в образовании» (Тверь, февраль 2013 г.);
— международная конференция «Геометрия в Одессе — 2013» (Украина, Одесса, май 2013 г.)

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 5 — в тезисах докладов.

**Личный вклад.** Диссертационная работа является самостоятельным исследованием автора. В работе, написанной в соавторстве с научным руководителем, А. М. Шелехову принадлежит постановка задачи и историческая часть введения, М. В. Антиповой принадлежит доказательство основных и вспомогательных утверждений.

## Краткое содержание диссертациионной работы

Во *введении* обосновывается актуальность тематики диссертационного исследования, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи представляемой работы.

В *первой главе* «Три-ткани Бола» излагается необходимый теоретический материал из монографии [30] и проведено некоторое предварительное исследование шестимерных тканей Бола.

В § 1.1 «Структурные уравнения многомерной три-ткани $W$» приводится определение многомерной три-ткани, выводятся ее структурные уравнения и находятся соотношения между тензорами кручения и кривизны. Определяется эквивалентность тканей, вводятся понятия координатной квазигруппы и лупы ткани, канонической связности (связности Черна), $W$-алгебры (алгебры Акивиса), определяемой тензорами кручения и кривизны ткани. Рассмотрены два важнейших класса тканей, которые неоднократно будут встречаться в работе: регулярные или параллелизуемые ткани, эквивалентные параллельной ткани; групповые ткани, определяемые группой Ли. Эти ткани характеризуются обращением в нуль тензоров кривизны и кручения или одного тензора кривизны соответственно. Детально рассмотрен вопрос о подтканях многомерных тканей, высекаемых слоями ткани $W$ на ее трансверсальных подмногообразиях. Наконец, рассмотрены условия замыкания на три-ткани некоторых конфигураций, образованных слоями ткани, а именно, конфигураций $H$ (шестиугольных), $T$

[30] Акивис М. А. Шелехов А. М. Многомерные три-ткани и их приложения: Монография // Тверь. Твер. гос. ун-т, 2010. 308 с.

(конфигураций Томсена), $R$ (Рейдемейстера), левых, правых и средних конфигураций Бола. С помощью условий замыкания определяются основные классы тканей: регулярные, шестиугольные, групповые, левые, правые и средние Бола.

В § 1.2 «Структурные уравнения средней ткани Бола» рассматриваются средние ткани Бола — основной объект изучения в диссертации. Приведено подробное описание средней конфигурации Бола $B_m$. Условия замыкания конфигурации $B_m$ описаны с помощью соотношений в координатой квазигруппе ткани (условного тождества):

$$\left.\begin{aligned} x_1y_2 = x_3y_4 \\ x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = x_4y_4 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_2y_1 = x_4y_3,$$

или с помощью универсального тождества, выполняемого в координатных лупах ткани:

$$B_m\colon \quad w \circ ((u \circ v)\backslash w) = (w/v) \circ (u\backslash w).$$

(Здесь символами $/$ и $\backslash$ обозначены обратные операции к операции $\circ$ в координатной лупе). Тензорная характеристика средних тканей Бола состоит в том, что тензор кривизны этой ткани кососимметричен по двум последним нижним индексам: $b^i_{j(k\ell)} = 0$. Структурные уравнения ткани $B_m$ записываются специальным образом:

$$\begin{aligned} &d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j - a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ &d\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j, \quad d\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + R^i_{jk\ell}\,\omega^k \wedge \omega^\ell. \end{aligned}$$

С их помощью доказывается, что на базе третьего слоения средней ткани Бола возникает структура симметрического пространства. Здесь же доказывается, что $G$-структура, определяемая средней тканью Бола, является замкнутой, и приведено выражение ковариантных производных тензора кривизны ткани $B_m$ через тензоры кручения и кривизны.

Далее определяется сердцевина ткани Бола, которая описывает симметрическую структуру, связанную с тканью $B_m$. В заключение параграфа определяется специальный подкласс тканей $B_m$ — ткани $E$, на которых замыкаются конфигурации $E$. Дано описание условий замыкания $E$ с помощью условного тождества:

$$\left.\begin{aligned} x_1y_2 = x_2y_1, \\ x_1y_3 = x_3y_1, \\ x_3y_2 = x_4y_1, \\ x_2y_3 = x_1y_4, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_4y_3 = x_3y_4. \tag{1}$$

Соотношения, связывающие тензоры кручения и кривизны ткани $E$, приведены в теореме 1.13.

В § 1.3 «Шестимерные три-ткани Бола» сначала излагаются результаты В. И. Федоровой, которая с помощью дискриминатных тензоров заменяет тензоры кручения и кривизны ткани Бола на новые тензоры, валентность которых на единицу меньше. Это позволяет классифицировать шестимерные ткани Бола по типу двухвалентного тензора $a^{ij}$. Результаты В. И. Федоровой изложены в теоремах 1.9 — 1.12.

Далее приводятся результаты А. М. Шелехова о шестимерных тканях $E$. Согласно [31], существует всего две такие ткани: ткань $E_1$ с симметричным тензором $a^{ij}$ ранга 1, которая была найдена Федоровой в [32], и ткань $E_2$ с несимметричным тензором $a^{ij}$ ранга 1, которая найдена в [33]. Мы записываем структурные уравнения ткани $E_2$ и находим ее уравнения в некоторых локальных координатах. Затем мы доказываем следующее утверждение (теорема 1.20.): *Если тензор кривизны шестимерной средней ткани Бола имеет в некотором базисе единственную существенную ненулевую компоненту, то эта компонента имеет вид $b^i_{jjk}$, где индексы $i, j, k$ все различны.* Этот факт дает основание ввести понятие тензора кривизны минимального ранга для многомерной три-ткани.

Во *второй главе* «Три-ткани Бола с тензором кривизны минимального ранга» определены средние три-ткани Бола с тензором кривизны минимального ранга, описаны их геометрические свойства, и проведена классификация восьмимерных тканей указанного вида.

В § 2.1 «Многомерные три-ткани Бола с тензором кривизны минимального ранга» дано определение многомерной средней три-ткани Бола $SB_m$ с тензором кривизны минимального ранга.

Тензор $b$ типа (1,3) вида $b = \lambda \otimes \alpha \otimes \beta \otimes \gamma$ , где $\lambda$ — вектор, а $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — ковекторы, назван тензором минимального ранга; в частности, если выполняются соотношения $\alpha(\lambda) = 0, \beta(\lambda) = 0, \gamma(\lambda) = 0,$ — специальным тензором минимального ранга.

Доказано (теорема 2.1) что существует базис, в котором тензор минимального ранга имеет единственную ненулевую компоненту $b^i_{jk\ell}$, где $i \neq j, i \neq k$, $i \neq \ell$.

Кососимметричный тензор $b$ типа (1,3) вида $b = \lambda \otimes \alpha(\beta \otimes \gamma - \gamma \otimes \beta)$, где $\lambda$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — как и выше, назван кососимметричным тензором минимального ранга;

[31]Шелехов А. М. Об аналитических решениях уравнения $x(yx) = (xy)x$ // Матем. заметки. 1991. № 4. С. 132–140.

[32]Федорова В. И. Шестимерные три-ткани Боля с симметричным тензором $a_{ij}$ // Ткани и квазигруппы. Калинин. Калининский гос. ун-т. 1981. С. 110–123.

[33]Шелехов А. М. Об аналитических решениях уравнения $x(yx) = (xy)x$ // Матем. заметки. 1991. № 4. С. 132–140.

в частности, если выполняются соотношения $\alpha(\lambda) = 0$, $\beta(\lambda) = 0$, $\gamma(\lambda) = 0$, — кососимметричным специальным тензором минимального ранга. Существует базис, в котором кососимметричный тензор минимального ранга имеет всего две ненулевые компоненты.

В диссертации рассматриваются средние ткани Бола, у которых тензор кривизны есть кососимметричный специальный тензор минимального ранга с дополнительным свойством $\alpha \equiv \beta$: $b = \lambda \otimes \alpha(\alpha \otimes \gamma - \gamma \otimes \alpha)$. Такие ткани обозначены символом $SB_m$.

Рассматривается базис, в котором тензор кривизны ткани $SB_m$ имеет единственную существенную ненулевую компоненту $b^1_{223} = b = const$. В этом базисе ткань $SB_m$ определяется следующей замкнутой системой структурных уравнений (теорема 2.3):

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}^1 &= \underset{1}{\omega}^2 \wedge \omega^1_2 + 2a^1_{12}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^2 + 2a^1_{23}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^3 + 2a^1_{2u}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^u + \\
&\quad + 2a^1_{3u}\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{1}{\omega}^u + a^1_{uv}\underset{1}{\omega}^u \wedge \underset{1}{\omega}^v, \qquad d\underset{1}{\omega}^2 = 0, \qquad d\underset{1}{\omega}^3 = 0,\\
d\underset{1}{\omega}^u &= 2a^u_{12}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^2 + 2a^u_{2v}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^v + 2a^u_{3v}\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{1}{\omega}^v + \\
&\quad + 2a^u_{23}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^3 + a^u_{vw}\underset{1}{\omega}^v \wedge \underset{1}{\omega}^w,\\
d\underset{2}{\omega}^1 &= \underset{2}{\omega}^2 \wedge \omega^1_2 - 2a^1_{12}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^2 - 2a^1_{23}\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^3 - 2a^1_{2u}\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^u - \\
&\quad - 2a^1_{3u}\underset{2}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^u - a^1_{uv}\underset{2}{\omega}^u \wedge \underset{2}{\omega}^v, \qquad d\underset{2}{\omega}^2 = 0, \qquad d\underset{2}{\omega}^3 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\underset{2}{\omega}^u &= -2a^u_{12}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^2 - 2a^u_{2v}\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^v - 2a^u_{3v}\underset{2}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^v - \\
&\quad - 2a^u_{23}\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^3 - a^u_{vw}\underset{2}{\omega}^v \wedge \underset{2}{\omega}^w,\\
d\omega^1_2 &= b(\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^3 - \underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^2), \qquad da^1_{23} = \frac{b}{2}(\underset{1}{\omega}^2 - \underset{2}{\omega}^2),
\end{aligned}$$

Здесь и далее $i, j, k = 1, 2, 3$, $t, u, v, w, z = 4, \dots r$, а величины $a^i_{jk}$, кроме $a^1_{23}$, постоянны.

Доказана

**Теорема 2.4.** *Рассматриваемая ткань $SB_m$ с единственной ненулевой компонентой тензора кривизны $b^1_{223} \neq 0$ расслаивается на $\infty^4$ $(2r-4)$-мерных нормальных групповых подтканей $SB_m(G_1)$, а ткань $SB_m$ представляет собой полупрямое произведение ткани $SB_m(G_1)$ на четырехмерную регулярную подткань $W_1$. Кроме того, ткань $SB_m(G_1)$ расслаивается на $\infty^{2r-6}$ двумерных нормальных регулярных подтканей $SB_m(H_1)$, причем ткань $SB_m(G_1)$ представляет собой полупрямое произведение регулярной двумерной ткани $SB_m(H_1)$ на групповую ткань $SB_m(\widetilde{G})$.*

Подкласс тканей $SB_m$, для которых выполняются соотношения $a^u_{12}=0$, $a^u_{23}=0$, мы обозначили $S_1B_m$. Найдены структурные уравнения тканей $S_1B_m$. Доказана

**Теорема 2.5.** *Всякая три-ткань $S_1B_m$ расслаивается на $\infty^{2r-6}$ шестимерных подтканей $B^6_m$. Это свойство характеризует подкласс тканей $S_1B_m$ в классе тканей $SB_m$.*

Подкласс три-тканей $S_1B_m$, определяемых соотношениями $a^u_{12}=0$, $a^u_{23}=0$, $a^1_{uv}=0$, мы обозначили $S_2B_m$. Найдены структурные уравнения тканей $S_2B_m$. Доказана

**Теорема 2.6.** *Многоообразие $M$ три-ткани $S_2B_m$ представляет собой прямое произведение трансверсально-геодезических многообразий $M_2$ и $\widetilde{M}_2$, а сама ткань $S_2B_m$ расслаивается на $\infty^{2r-6}$ шестимерных подтканей $B^6_m$, расположенных на многообразиях $M_2$, и на $\infty^6$ $(2r-6)$-мерных групповых подтканей, определяемых группой $\widetilde{G}$, расположенных на многообразиях $\widetilde{M}_2$. Указанные свойства характеризуют подкласс тканей $S_2B_m$ в классе тканей $SB_m$.*

Подкласс три-тканей $S_2B_m$, определяемых соотношениями $a^u_{12}=0$, $a^u_{23}=0$, $a^1_{uv}=0$, $a^1_{2u}=0$, $a^1_{3u}=0$, мы обозначили $S_3B_m$. Найдены структурные уравнения тканей $S_3B_m$. Для тканей $S_3B_m$ справедлива теорема 2.6 с добавочным условием, что ткань $SB_m(\widetilde{G})$ является нормальной подтканью.

Подкласс три-тканей $S_2B_m$, определяемых соотношениями $a^u_{12}=0$, $a^u_{23}=0$, $a^1_{uv}=0$, $a^u_{2v}=0$, $a^u_{3v}=0$, мы обозначили $S_4B_m$. Найдены структурны уравнения тканей $S_4B_m$. Для тканей $S_4B_m$ справедлива теорема 2.6 с добавочным условием, что ткань $B^6_m$ является нормальной подтканью.

Подкласс три-тканей $SB_m$, определяемых соотношениями $a^1_{2u}=a^1_{3u}=$ $=a^1_{uv}=0$, $a^u_{12}=a^u_{2v}=a^u_{3v}=a^u_{23}=0$, мы обозначили $S_5B_m$. Найдены структурные уравнения тканей $S_5B_m$. Для тканей $S_5B_m$ доказана

**Теорема 2.7** *Ткань $S_5B_m$ представляет собой прямое произведение шестимерной ткани Бола $B^6_m$ и групповой ткани, порожденной группой Ли. Это свойство характеризует подкласс тканей $S_5B_m$ в классе тканей $SB_m$.*

В § 2.2 «Восьмимерные гиперболические ткани $SB^8_m$ первого типа» рассмотрены ткани $SB_m$ на многообразии размерности 8, мы обозначаем их $SB^8_m$. В случае $r=4$ величины $a^i_{jk}$ связаны соотношениями

$$a^4_{12}a^1_{43}=0, \quad a^1_{34}a^1_{12}+a^4_{34}a^1_{42}+a^4_{42}a^1_{43}=0, \quad a^4_{12}a^4_{43}=0.$$

Возможны два случая: $a^4_{12}\neq 0$ и $a^4_{12}=0$. Ткани $SB^8_m$, для которых

$$a^4_{12}\neq 0,\ a^1_{43}=0,\ a^4_{43}=0,$$

мы назвали тканями $SB^8_m$ первого типа, а ткани $SB^8_m$, для которых

$$a^4_{12}=0,\ a^1_{34}a^1_{12}+a^4_{34}a^1_{42}+a^4_{42}a^1_{43}=0$$

– тканями $SB^8_m$ второго типа.

С тканями первого типа связано некоторое характеристическое уравнение $a^1_{24}\lambda^2 + \lambda(a^4_{24} + a^1_{12}) + a^4_{12} = 0$. Ткани, для которых корни этого уравнения вещественные и различные, мы назвали гиперболическими, для которых корни совпадают — параболическими. Найдены структурные и конечные уравнения гиперболических тканей $SB^8_m$, исследована соответствующая этой ткани алгебра Ли $A_1$, определяемая тензором кручения $a^i_{jk}$. Верны следующие утверждения.

**Теорема 2.8.** *Существует двупараметрическое семейство тканей $SB^8_m$ первого типа. В некоторых локальных координатах их уравнения имеют вид:*

$$\begin{aligned}
z^1 =& x^1 + e^{-k(\lambda_1)x^2}[y^1 + m(\lambda_1)\cdot(x^2y^3 - x^3y^2)],\\
z^2 =& x^2 + y^2,\\
z^3 =& x^3 + y^3,\\
z^4 =& x^4 + e^{-k(\lambda_2)x^2}[y^4 + m(\lambda_2)\cdot(x^2y^3 - x^3y^2)],
\end{aligned}$$

*где $\lambda_1$, $\lambda_2$ – параметры, $m(\lambda_1) = k_1^{-1}b\lambda_1, m(\lambda_2) = k_2^{-1}b\lambda_2$, $\frac{-2(a^1_{12}\lambda_1+a^4_{12})}{\lambda_1} = \frac{2(a^1_{24}\lambda_1+a^4_{24})}{1} \equiv k_1$, $\frac{-2(a^1_{12}\lambda_2+a^4_{12})}{\lambda_2} = \frac{2(a^1_{24}\lambda_2+a^4_{24})}{1} \equiv k_2$.*

**Теорема 2.9.** *Алгебра $A_1$ является разложимой алгеброй вида $g_{3,4} + g_1$, где $g_{3,4}$ — трехмерная алгебра Ли с умножением $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_1$, $[\tilde{e}_4, \tilde{e}_2] = h\tilde{e}_4$, $-1 < h < 1$, а $g_1$ — одномерная алгебра Ли с базисом $\{e_3\}$.*

Мы используем классификацию разрешимых алгебр Ли из [34]

В § 2.3 «Некоторые свойства гиперболических три-тканей Бола $SB^8_m$ первого типа» 1) доказана эластичность гиперболических три-тканей Бола $SB^8_m$ первого типа путем непосредственной проверки условий (1), означающих замыкание произвольной фигуры $E$; 2) исходя из уравнений, указанных выше в теореме 2.8, найдены компоненты тензоров кручения и кривизны; 3) найдены уравнения сердцевины гиперболической ткани $SB^8_m$ первого основного типа:

$$\begin{aligned}
z^1_3 =& z^1_2 - e^{k(\lambda_1)(z^2_1 - z^2_2)}(z^1_1 - z^1_2),\\
z^2_3 =& 2z^2_2 - z^2_1,\\
z^3_3 =& 2z^3_2 - z^3_1,\\
z^4_3 =& z^4_2 - e^{k(\lambda_2)(z^2_1 - z^2_2)}(z^4_1 - z^4_2).
\end{aligned}$$

В § 2.4 «Восьмимерные ткани $SB^8_m$ второго типа» рассматриваются восьмимерные ткани $SB^8_m$ второго типа, для которых выполняются соотношения $a^4_{12} = 0$, $a^1_{34}a^1_{12} + a^4_{34}a^1_{42} + a^4_{42}a^1_{43} = 0$. Найдены структурные и конечные уравнения этих тканей, исследована соответствующая этой ткани алгебра Ли $A_2$. Верны следующие утверждения.

[34]Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем. 1963. № 1. С. 114–123.

**Теорема 2.10.** *Существует двупараметрическое семейство тканей $SB^8_m$ второго типа. В некоторых локальных координатах их уравнения имеют вид*

$$\begin{aligned}
z^1 =& x^1 + e^{2x^2}(y^1 + x^3y^2 - y^3x^2),\\
z^2 =& x^2 + y^2,\\
z^3 =& x^3 + y^3,\\
z^4 =& e^{2(ay^2+cy^3)}x^4 + y^4.
\end{aligned}$$

**Теорема 2.11.** *Алгебра $A_2$ является алгеброй вида $2g_2$, где $g_2$ – ненильпотентная алгебра Ли второго порядка с умножением $[e_1, e_2] = e_1$, а $g_1$ — одномерная алгебра Ли с базисом $\{e_3\}$.*

В § 2.5 «Некоторые свойства восьмимерной три-ткани Бола $SB^8_m$ второго типа» доказана эластичность восьмимерных тканей Бола $SB^8_m$ второго типа. Найдены компоненты тензоров кручения и кривизны, исходя из уравнений, записанных выше:

$$a^1_{12} = 1,\ a^1_{23} = e^{2x^2},\ a^4_{24} = a,\ a^4_{34} = c,\ b^1_{223} = -b^1_{232} = 2e^{2x^2}.$$

Здесь постоянные $a$ и $c$ могут быть любыми вещественными числами. Устремляя их к нулю, получаем, что ткань $SB^8_m$ второго типа может быть деформирована в ткань $\widetilde{SB}^8_m$, которая представляет собой прямое произведение шестимерной ткани Бола $B^6_m$ и двумерной регулярной ткани (ткань типа $S_5B_m$).

Здесь же найдены уравнения сердцевины ткани $SB^8_m$ второго основного типа.

В § 2.6 «Восьмимерные параболические ткани $SB^8_m$ первого типа» рассматривались ткани $SB^8_m$, для которых корни характеристического уравнения совпадают (ткани параболического типа). Рассматриваемый класс тканей выделяется условием $(a^4_{24} + a^1_{12})^2 - 4a^1_{24}a^4_{12} = 0$. Найдены структурные и конечные уравнения восьмимерных параболических тканей $SB^8_m$ первого типа, исследована соответствующая этой ткани алгебра Ли $A_3$. Верны следующие утверждения.

**Теорема 2.12.** *Существует однопараметрическое семейство параболических тканей $SB^8_m$ первого основного типа. В некоторых локальных координатах их уравнения имеют вид:*

$$\begin{aligned}
z^1 =& x^1 + e^{x^2}(y^1 + x^2y^3 - x^3y^2),\\
z^2 =& x^2 + y^2,\\
z^3 =& x^3 + y^3,\\
z^4 =& x^4 + e^{x^2}[y^4 - Cx^2y^1 + C(x^2y^3 - x^3y^2)(1 - x^2)],
\end{aligned}$$

*где $C = 2\lambda a^1_{24}k^{-1}$.*

**Теорема 2.13.** *Алгебра $A_3$ является разложимой алгеброй вида $g_{3,2} + g_1$, где $g_{3,2}$ — трехмерная алгебра Ли с умножением $\bar{e}_3\bar{e}_4 = 0$, $\bar{e}_3\tilde{e}_2 = \bar{e}_3 + \bar{e}_4$, $\bar{e}_4\tilde{e}_2 = \bar{e}_4$, а $g_1$ — одномерная алгебра Ли с базисом $\{e_3\}$.*

В § 2.7 «Некоторые свойства параболических три-тканей Бола $SB_m^8$ первого типа» доказана эластичность параболических три-тканей Бола $SB_m^8$ первого типа; найдены компоненты тензоров кручения и кривизны, исходя из уравнений, указанных выше; найдены уравнения сердцевины.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Изучен класс многомерных средних три-тканей Бола с тензором кривизны минимального ранга (ткань $SB_m$); найдены и исследованы структурные уравнения тканей $SB_m$, выделены основные классы таких тканей и дана их геометрическая характеристика.

2. Показано, что существует три основных класса восьмимерных тканей $SB_m$, найдены структурные и конечные уравнения каждого из классов тканей $SB_m^8$.

3. Исследованы основные свойства каждого из классов тканей $SB_m^8$, в частности, охарактеризованы их касательные алгебры; найдены их сердцевины; доказано, что ткани $SB_m^8$ являются тканями $E$.

# Публикации автора по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК:


1. Антипова, М. В. О тканях Бола с почти нулевым тензором кривизны / М. В. Антипова // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. Физико-математические и технические науки. – 2011. – № 26. – С. 28–34. (0,81 п.л.)

2. Антипова, М. В. Об одном приложении теории многомерных три-тканей / М. В. Антипова // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». – Тверь: Твер. гос.ун-т. – 2012. – № 32. – С. 81–89. (0,79 п.л.)

3. Антипова, М. В. Восьмимерные ткани Бола с почти нулевым тензором кривизны / М. В. Антипова, А. М. Шелехов// Известия ВУЗов. Математика. – 2013. – № 2. – С. 3–15. (0,88 авт.п.л.) Публикации в других изданиях:

4. Хныкина, М. В. Об одном классе шестимерных тканей Бола / М. В. Хныкина // Математика, информатика, их приложения и роль в образовании: Материалы Второй Российской школы-конференции с международным участием для молодых ученых: статьи, обзоры, тезисы докладов. – Тверь: ТвГУ.– 2010. – С. 305–309. (0,29 п.л.)

5. Хныкина, М. В. О тканях Бола с почти нулевым тензором кривизны / М. В. Хныкина // Тезисы докладов международной научной конференции «Геометрия в Одессе — 2011». – Одесса.– 2011. – С. 65. (0,05 п.л.)

6. Антипова, М. В. О восьмимерных средних тканях Бола с единственной ненулевой компонентой тензора кривизны / М. В. Антипова // Тезисы докладов международной научной конференции «Геометрия в Одессе — 2012». – Одесса. – 2012. – С. 36. (0,05 п.л.)

7. Антипова, М. В. Параболические ткани Бола с тензором кривизны минимального ранга / М. В. Антипова // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Лобачевские чтения — 2012: материалы XI молодежной школы-конференции. – Т. 45.– Казань. – 2012. – С. 8. (0,12 п.л.)

8. Антипова, М. В. Об одном примере восьмимерной эластичной три-ткани / М. В. Антипова // Математика, информатика, их приложения и роль в образовании. Третья Российская школа-конференция для молодых ученых: Тезисы докладов. – Тверь: Твер. гос.ун-т. – 2013. – С. 8. (0,06 п.л.)

9. Антипова, М. В. Примеры эластичных восьмимерных тканей Бола с тензором кривизны минимального ранга / М. В. Антипова // Тезисы докладов международной научной конференции «Геометрия в Одессе — 2013». – Одесса. – 2013. – С. 31. (0,05 п.л.)